

1 Funktionen

Wie ich schon angekündigt habe folgt erst mal noch ein kleiner Absatz zu Funktionen. Dafür folgen erst einmal ein paar Definitionen.

1.1 Definition Eine Menge ist erst einmal eine Vereinigung von Elementen. Konkret heißt das, man nimmt eine beliebige Anzahl von Elementen und packt sie zusammen und nennt das dann Menge. Ein Beispiel wäre dann $\{a, b, c\}$, das wäre jetzt die Menge die die Buchstaben a, b und c enthalten würde. Die Geschweiften Klammern Symbolisieren das es sich jetzt um eine Menge handelt und die Kommas trennen die Elemente von einander. Allerdings sind so erst einmal nur endliche Mengen möglich. Dafür gibt es dann eine andere Notation wie man auch größere Mengen konstruieren kann. Nämlich folgender Maßen: $\{x \mid x \text{ ist eine Sache die Blau ist}\}$. Das wäre dann jetzt die Menge aller blauen Gegenstände. "x" ist da eine Variable und nach dem "ist" kommt eine Bedingung an das x, die dann die Elemente in der Menge erfüllen. Die ganzen Zahlen auch mit $\mathbb{Z}$ bezeichnet, sind zum Beispiel auch eine Menge, das sind dann die Zahlen $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ (Die Punkte Symbolisieren das es noch weiter geht.) Oder die reellen Zahlen, also alle Komma Zahlen, die mit $\mathbb{R}$ bezeichnet werden, sind auch eine Menge.

Das ist an sich eine sehr naive Vorstellung von was Mengen sind, die auch widersprüchlich ist. Ich werde dazu im Appendix ein bisschen was dazu schreiben, weil ich zumindest es als sehr interessant empfinde. Diese Probleme wenn man die Definition zu ernst nimmt, sind aber schon eher Spezieller Natur und sie treten in der freien Wildbahn nicht auf. Also reicht es im weiteren auf diese Probleme zu ignorieren und die Naive Definition einer Menge zu nutzen.

So jetzt kann man eine Funktion definieren. Die Grund Idee einer Funktion und warum die so wichtig sind, ist das man verschiedene Mengen gerne mit einander Verbinden möchte.

1.2 Definition Seien M und N zwei Mengen. Eine Funktion f von M nach N ist in Prinzip ein Weg Elemente von M, mit Elementen von N zu verbinden. Ganz Konkret heißt das die Funktion f ordnet jedem Element m aus M (man schreibt dafür auch $m \in M$, also m ist ein Element von M) genau ein Element n aus N zu ($n \in N$). Die Notation dafür ist in der Regel $f : M \rightarrow N$, dafür das f eine Funktion von M nach N ist. Wenn einem vor allem interessiert auf welches Element die Elemente von M geschickt werden, dann schreibt man auch $m \mapsto n$. Oder wenn man ein explizites Element aus m hat und zeigen will das es auf n geschickt wird, dann schreibt man $f(m)=n$.

Um die Definition zu verarbeiten kommen jetzt ein paar Beispielen.

1.3 Beispiel Sei $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ die Menge der Ganzen Zahlen. Ein paar mögliche Funktionen $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ wären zum Beispiel in dem man alle Elemente auf sich selber schickt, daher $f : x \mapsto x$. Da passiert nichts viel aber rein formal ist. So eine Funktion kann man natürlich für jede beliebige Menge M definieren, die jedes Element nur auf sich selbst abbildet. Diese Funktionen sind jetzt auch nicht ganz unwichtig, zumindest wichtig genug um einen eigenen Namen zu haben, nämlich die Identität. Man kann aber noch viele andere Funktionen definieren, zum Beispiel die Funktion $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $g : z \mapsto z + 2$ oder $g : z \mapsto z + 6$ oder eine andere Zahl. Alternativ ist auch $h : z \mapsto z \times z$ eine legitime Funktion. Oder eine bisschen Kompliziertere Funktion: $l : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ die so definiert ist:

$$l(n) = \begin{cases} n/2 & \text{für } n \text{ gerade} \\ (n-1)/2 & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases} \quad (1)$$

So um diese Sektion der Funktionen zu beenden gehe ich jetzt noch einmal kurz auf ein paar mögliche Eigenschaften ein, die Funktionen erfüllen können.

1.4 Definition Eine Funktion $f : M \rightarrow N$ heißt injektiv wenn zwei Elemente aus M, durch f nicht auf ein gleiches Element abgebildet werden. Wie man leicht einsehen kann sind alle Funktionen bis auf l injektiv. l ist nicht injektiv da 2 und 3 auf durch l beide auf 1 abgebildet werden.

1.5 Definition Eine Funktion $f : M \rightarrow N$ ist surjektiv wenn es für jedes Element $n \in N$ ein Element $m \in M$ gibt sodass $f(m) = n$ gilt. Also jedes Element aus N durch die Funktion f, von M aus erreicht werden kann. Auch dafür gibt es wieder Beispiele, nämlich erfüllt jede Funktion aus den Beispielen bei 1.3 diese Bedingung. Ein Beispiel für eine Funktion die nicht injektiv ist, wäre folgende: $y : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $y : z \mapsto 2z$. Da eine ungerade Zahl wie 3 durch z nicht erreicht werden kann.

1.6 Definition Eine Funktion die sowohl injektiv als auch surjektiv ist, nennt man auch bijektiv.

1.7 Definition Wenn man zwei Funktionen hat, wobei die Zielmenge die Ursprungsmenge der anderen ist, also zum Beispiel $f : M \rightarrow N$ und $g : N \rightarrow W$, wobei M, N und W Mengen sind, dann kann man f und g komponieren, beziehungsweise nacheinander ausführen. Das heißt f komponiert mit g ist eine Funktion von M nach W , die definiert ist in dem man auf ein Element in M erst f anwendet und auf das Ergebnis danach g anwendet. Man schreibt dafür auch $g \circ f$. Rein Formal ist die Komposition so definiert: $g \circ f(x) = g(f(x))$ für ein $x \in M$.

Zur Bijektivität gibt es eine Äquivalente Definition.

1.8 Definition Eine Funktion $f : M \rightarrow N$ heißt invertierbar wenn es eine Funktion $g : N \rightarrow M$ gibt so dass $f(g(n))=n$ für alle $n \in N$ ist und für alle $m \in M$ $g(f(m))=m$ gilt. Man schreibt auch $f \circ g = id$ und $g \circ f = id$, wobei id für die Identität steht, die ja gar nichts macht. Die Identität ist ein bisschen so wie die Null bei der Addition oder die 1 bei der Multiplikation. Sie macht nichts aber es ist trotzdem ganz schön nützlich ein eigenen Namen dafür zu haben.

1.9 Satz Eine Funktion ist genau dann Bijektiv ist wenn sie invertierbar ist. (Also das heißt der Begriff bijektiv ist Äquivalent zum Begriff invertierbar. Um das zu zeigen reicht es formal zu beweisen das aus Invertierbarkeit Bijektivität folgt und aus der Bijektivität wiederum Invertierbarkeit.)

Beweis. Wenn eine Funktion $f : M \rightarrow N$ Bijektiv ist, dann kann man sich ganz einfach eine Umkehrabbildung $g : N \rightarrow M$ definieren in dem man für ein $n \in N$, $g(n)$ definiert als das Element m in M für das gilt $f(m)=n$. Da f bijektiv ist, ist g für alle $n \in N$ definiert und die Wahl ist auch eindeutig aufgrund der Injektivität.

Die andere Richtung geht folgendermaßen: Es wird jetzt ein klein wenig trickreich aber ich denke trotzdem noch gut verstehbar. Wenn eine Funktion f invertierbar ist, dann gibt es nach der Definition eine Funktion g sodass $f \circ g = id$ gilt und dass $g \circ f = id$ gilt. Was man ja ziemlich direkt einsehen kann ist das die Identität sowohl injektiv als auch Surjektiv ist (Die macht ja nichts außer jedes Element auf sich selbst zu schicken). Jetzt braucht man folgende Überlegung. Wenn $g \circ f$ injektiv ist. Dann muss f auch injektiv sein. Weil wenn das nicht stimmt, f zwei Elemente auf das gleiche Element schickt. Diese beiden unterschiedlichen Elemente werden dann natürlich durch $g \circ f$ auch wieder auf das gleiche Element geschickt was der Injektivität von $g \circ f$ widerspricht. Genau so geht die Surjektivität. Nur nutzt man hier, dass $f \circ g$ surjektiv ist. Denn wenn f nicht surjektiv ist dann kann $f \circ g$ erst gar nicht surjektiv sein. Weil wie denn???

So wo jetzt das erst einmal geschafft wurde kann man jetzt die Automorphismen Gruppe definieren und die sind im Prinzip genau das was Symmetrien sein sollen. Ersteinmal soll eine Symmetrie irgend eine Operation auf einer Menge sein. Deshalb sind Symmetrien an sich erst mal eine Funktion. Wie man in dem Text über Gruppen gesehen hat, sind sie auch invertierbar. Das heißt im Prinzip ist eine Symmetrie Operation eine invertierbare Selbstabbildung. Also eine Funktion die von einer Menge in die selber Menge abbildet. Damit wären wir fast geschafft. Nur noch eine Einsicht fehlt. Denn was machen Symmetrien denn noch aus. nämlich das die bestimmte Sachen unverändert lassen. Zum Beispiel bei diesen Geometrischen Operation soll am ende wieder ein Kreis rauskommen der genau so groß ist. So eine Symmetrie erhält man wenn man sagt diese Funktion soll die abstände erhalten. Das heißt wenn man zwei Punkte in die Funktion reinsteckt, dann soll der Abstand zwischen sich durch die Funktion nicht verändern. Bei Gruppen kann man sich auch überlegen was ist da die Wesentliche Eigenschaft die durch eine Funktion nicht verändert werden soll. In diesem Fall ist das die Operation. Also für eine Symmetrische Gruppenabbildung f soll f angewendet auf a mal b das gleiche sein wie $f(a)$ mal $f(b)$.

Also ich komme jetzt mal zu eine Letzten Definition.

1.10 Definition Angenommen sein M eine Menge. Und P irgend einer Eigenschaft die man einer oder mehreren Elementen zu Ordnen kann. Die Menge aller Funktionen invertierbaren Funktionen $f : M \rightarrow M$, wobei sowohl f als auch das inverse von f die Eigenschaft P erhalten, heißt die Automorphismen Gruppe. Auch bezeichnet mit $\text{Aut}(M)$.

Bei dem Noether Theorem wird man sich dann auch genau überlegen müssen was jetzt genau wesentlich an einem Physikalischen System ist. Also was durch eine Symmetrische Abbildung unverändert bleiben soll. Dieses Etwas heißt Wirkung und was das genau sein soll werden ich nächstes mal erklären.